AGENT DE MAITRISE TERRITORIAL
CONCOURS EXTERNE
SESSION 2023

Des problèmes d'application sur le programme de mathématiques.
Durée : 2 heures
Coefficient : 2

INDICATIONS DE CORRECTION

Exercice 1 (3 points)

En début d'année, la commune de Techniville verse une somme C de 20 000 € sur un livret d'épargne dont le taux annuel simple est t1 = 1%. L'année suivante, le taux sur ce livret est réévalué et passe à t2 = 1,25%.

Question a) (1,5 point)

Quelle valeur acquise (Va) Techniville aura sur son compte à la fin de la 2 e année ? (Arrondir à l'euro prêt)

C = 20 000 €,
Taux t1 = 0,01,
Taux t2 = 0,0125

Intérêt au bout de 1 an : I1 = C × t1 = 20 000 × 0,01 = 200 €
V1an= C + I1 = 20 000 + 200 = 20 200 €

Intérêt au bout de 2 ans : I2 = V1an × t2 = 20 200 × 0,0125 = 252,50 € arrondi à 253 €
Valeur acquise au bout de 2 ans : Va = 20 200 + 253 = **20 453 €**

Question b) (1,5 point)

Pour quel taux t3 Techniville aurait la même valeur acquise au bout d'un an et demi, si ce taux ne change pas ?

Va valeur acquise au bout de 1,5 ans Va = 20 453 €
On cherche le taux t3 tel que:

$$20\,453 = 20000 \times \left(1 + \frac{t3}{100}\right)^{1,5}$$
$$\left(1 + \frac{t3}{100}\right)^{1,5} = 20453 : 20000$$
$$1 + \frac{t3}{100} = \sqrt[1,5]{1,02265}$$
$$1 + \frac{t3}{100} \approx 1,015$$

t3 ≈ 0,015 soit 1,5 %

Exercice 2 (5,5 points)

Dans le cadre du bilan des émissions de gaz à effet de serre (Bilan GES) que leur ville est tenue d'établir, les services techniques évaluent les quantités de C02 émises par la consommation de carburant du parc automobile et par la chaudière au fioul des ateliers techniques.
Le parc auto est constitué de :

- 5 voitures essence type « citadines » qui roulent chacune en moyenne 15 000 Km/an et consomment 6 l/100 Km. Pour l'essence, l'émission de gaz carbonique par kilomètre est de 0,162 kg CO2/km
- 3 fourgonnettes diésel qui roulent en moyenne 4 000 Km/an et consomment 5 l/100 Km. Pour le diésel, l'émission de gaz carbonique par kilomètre est de 0,155 kg CO2/Km

La chaudière des ateliers consomme 400 litres de fioul chaque mois.
1 m^3 de fioul domestique émet 3 250 kg de CO2 ($kgCO2/m^3$).

Question a) (0,5 point)

Exprimez les émissions des véhicules citadines, des fourgonnettes et de la chaudière par litre (kgCO2/l). Arrondir au $1/10^e$.

Pour les véhicules : kilomètres parcourus avec 1 litre de carburant :

Citadines : 100/6 ≈ 16,67 km
Fourgonnettes : 100/5 = 20 km

- Émission d'une citadine = 0,162 × 16,67 ≈ **2,7 kgCO2/L**
- Émission d'une fourgonnette = 0,155 × 20 = **3,1 kgCO2/L**
- Émissions de la chaudière = 3 250/1000 = 3,25 kgCO2/L ≈ **3,3 kgCO2/L** (arrondi au $1/10^e$)

Question b) (0,5 point)

Sur la base des données de l'exercice, comparer les émissions de ces combustibles. Est-il vrai qu'un véhicule diésel consomme moins qu'un véhicule essence ? Pourquoi ?

Comparaison émissions des combustibles :

Véhicule essence : 0,162 kgCO2/km
Véhicule diesel : 0,155 kgCO2/km
Le véhicule diesel émet moins de combustible qu'un véhicule essence.

Comparaison consommation :

Véhicule essence : 6L/100km
Véhicule diesel : 5L/100km
Le véhicule diesel consomme moins de carburant qu'un véhicule essence.

Question c) (1 point)

Calculez l'émission annuelle de l'ensemble des véhicules (citadines et fourgonnettes) puis les émissions annuelles totales de combustibles (parc auto et chaudière). En kilogrammes (kgC02) et en tonnes (t/CO2).

Véhicules :

Pour les 5 Véhicules essence et 15 000 km chacun : 0,162 × 15 000 × 5 = 12 150 kgCO2,
Pour les 3 fourgonnettes diésel et 4 000 km chacune : 0,155 × 4 000 × 3 = 1 860 kgCO2,
Émission annuelle du parc auto : 12 150 + 1 860 = 14 010 kgCO2, soit 14,01 tCO2

Chaudière :

Consommation annuelle de fioul domestique : 400 L/mois × 12 mois = 4 800 L (4,8 m^3)
Émission annuelle chaudière : 3 250 × 4,8 = 15 600 kgCO2, soit 15,6 tCO2,

Émission annuelle totale de combustibles : 14 010 + 15 600 = **29 610 kgCO2, soit 29,61 tCO2.**

Question d) (0,5 point)

Quelle part du total représentent les émissions de la chaudière ? Exprimez en pourcentage.

La chaudière représente $\frac{15,6}{29,61} \approx 0,5268$ soit environ **53 %** des émissions annuelles globales.

Question e) (1,5 point)

Pour diminuer l'empreinte carbone, on peut remplacer 2 citadines par des véhicules hybrides, supprimer 1 fourgonnette (elles ne roulent pas beaucoup) et diminuer de 15% la consommation de la chaudière grâce à un thermostat programmable.
Le véhicule hybride émet 0,073 kg CO2/Km.

Calculez la nouvelle quantité totale (véhicules et chaudière) de CO2 émise chaque année (en kg et en tonnes, arrondir au 100^e). La baisse des émissions représente quelle part ?(en pourcentage)

Nouvelle émission annuelle véhicules :

3 véhicules essence, 2 véhicules hybrides, 2 fourgonnettes,

Émission = (0,162 × 3 + 0,073 × 2) × 15 000 + 0,155 × 2 × 4 000 = 10 720 kgCO2

Nouvelle émission chaudière économie 15% :

3 250 × 4,8 × (1 – 0,15) = 13 260 kgCO2

Nouvelle émission totale : 10 720 + 13 260 = **23 980 kgCO2 soit 23,98 tCO2**

Économie sur les émissions globales de CO2 : $\dfrac{29{,}61 - 23{,}98}{29{,}61} \approx 0{,}1901$ soit environ **19,01%.**

Question f) (1,5 point)

On observe que 40% des déplacements des citadines sont des déplacements professionnels qui peuvent être faits en train. Le train émet 0,006 kg C02/km.

Si on remplace 40% des déplacements effectués par les véhicules essence par des trajets en train, quelle est la diminution annuelle des émissions sur l'ensemble des trajets ?
En tonnes et en pourcentage.

40 % des déplacements en train = 5 × 15 000 × 0,4 = 30 000 km
60 % des déplacements en voiture : 45 000 Km
Émissions train + voitures = 30 000 × 0,006 + 45 000 × 0,162 = 7 470 kgCO2, soit 7,47 tCO2

Économie en émission de GES :

Émission 5 voitures essence : 12,15 tCO2,

Émission mixte voitures et train : 7,47 tCO2

Économie : 12,15 – 7,47 = 4,68 tCO2

Pour le pourcentage, **deux réponses peuvent être acceptées**:

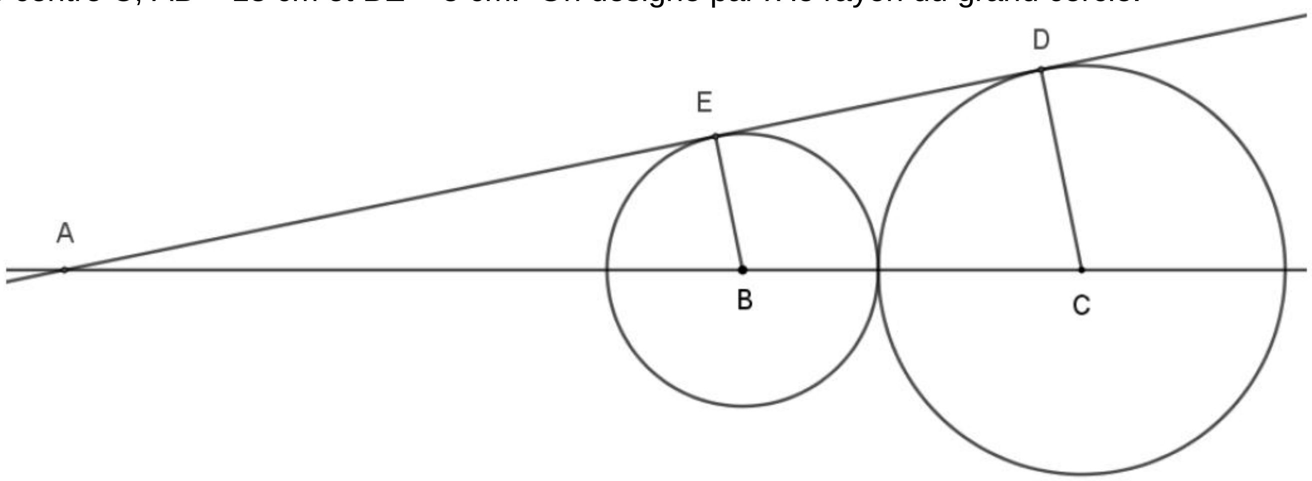
$\dfrac{4{,}68}{12{,}15} \approx 0{,}385$ soit environ **38,5%** de réduction sur l'ensemble des trajets véhicules essences.

ou

$\dfrac{4{,}68}{14{,}01} \approx 0{,}334$ soit environ **33,4%** de réduction sur l'ensemble des trajets du parc auto.

Exercice 3 (7 points)

Dans la figure ci-dessous, la droite (AD) est tangente à la fois au cercle de centre A et au cercle de centre C, AB = 13 cm et BE = 5 cm. On désigne par x le rayon du grand cercle.



1) a) Montrez que le segment [BE] est perpendiculaire à la droite (AD). (0,5 point)

(AE) est une tangente au cercle de centre B au point E, donc le rayon [BE] est perpendiculaire à la tangente (AE) qui est aussi (AD).

b) Montrez que le segment [CD] est perpendiculaire à la droite (AD). (0,5 point)

(AD) est une tangente au cercle de centre C au point D, donc le rayon [CD] est perpendiculaire à la tangente (AD).

c) Que peut-on dire des segments [BE] et [CD] ? (0,5 point)

Les segments [BE] et [CD] sont perpendiculaires à la droite (AD), donc ils sont parallèles.

d) Montrez que x vérifie $\frac{13}{13+5+x} = \frac{5}{x}$ (1 point)

x étant le rayon du grand cercle, on a CD = x.
Comme les droites (ED) et (BC) sont sécantes au point A
et comme les droites (BE) et (CD) sont parallèles,
on peut appliquer le théorème de Thalès et on obtient :

$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{DC}$ 0,5 point

Comme les points A, B et C sont alignés, que AB = 13, BC = 5 + x, on a :

$\frac{13}{13+5+x} = \frac{AE}{AD} = \frac{5}{x}$ En particulier $\boxed{\frac{13}{13+5+x} = \frac{5}{x}}$ 0,5 point

e) En déduire la valeur du rayon du plus grand cercle. (1 point)

Par un produit en croix, on obtient : $13x = 5(18 + x)$
donc $13x = 90 + 5x$
$8x = 90$
$x = 90 \div 8 = 11{,}25$
Ainsi, le rayon [CD] du plus grand cercle mesure 11,25 cm.

2) a) Calculez les valeurs exactes des longueurs AE et AD. (1 point)

Dans le triangle ABE rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AB^2 = AE^2 + EB^2$
Ainsi $AE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
Donc AE = $\sqrt{144} = 12$.
En conclusion $\boxed{AE = 12 \text{ cm}}$. 0,5 point

Dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AC^2 = AD^2 + DC^2$
Or AC = 13 + 5 + 11,25 = 29,25 cm
Ainsi $AD^2 = 29{,}25^2 - 11{,}25^2 = 729$
Donc AD= $\sqrt{729}=27$.
En conclusion $\boxed{AD = 27 \text{ cm}}$. 0,5 point

<u>Autre méthode pour calculer AD :</u>
D'après la question 1)d), on a $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{x}$ et d'après la question1)e), on a x = 11,25.

Ainsi $\frac{12}{AD} = \frac{5}{11{,}25}$, en appliquant le produit en croix, on obtient AD = $\frac{12 \times 11{,}25}{5} = 27$

b) Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ? (0,5 point)

Les deux côtés [BE] et [CD] sont parallèles, BCDE est donc un trapèze.

c) Calculez l'aire du quadrilatère BCDE. (1 point)

[DE] est perpendiculaire aux côtés [BE] et [CD].
Donc la hauteur du trapèze est ED = AD – AE = 27 − 12 = 15 cm.

Finalement l'aire du trapèze BCDE est donné par $\frac{(EB + DC) \times ED}{2}$.

Soit $\frac{(5 + 11,25) \times 15}{2} = 121,875$

L'aire du quadrilatère est de **<u>121,875 cm²</u>**.

3) Montrez que la mesure de l'angle $\widehat{ABE}$ est égale à 22,6° au dixième près. (1 point)

FAUX donner le point

Dans le triangle ABE rectangle en E, on peut utiliser le cosinus (par exemple) et on a :

$\cos \widehat{ABE} = \frac{EB}{AB} = \frac{5}{13}$.

Donc $\widehat{ABE} = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67,4°$

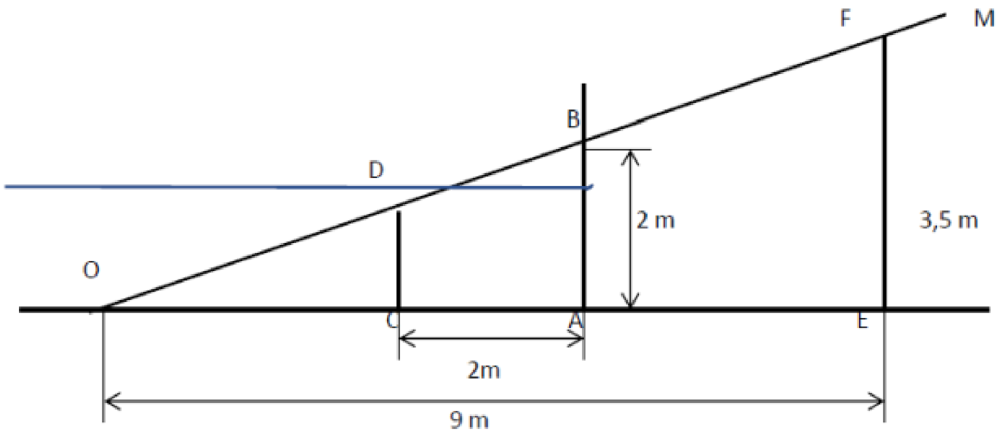
Exercice 4 (3 points)

En temps normal la hauteur d'eau de la rivière « Borne » est de 2m, mesurée au repère B de l'échelle accrochée au mur parapet [AB] qui constitue le bord de la rivière.

Des échelles perpendiculaires au lit de la rivière mesurent à différentes distances la hauteur d'eau. Ainsi lors de la dernière crue le niveau est monté à 3,5m (repère F de l'échelle [EF] située à 9m du point O).

Inversement à la fin août, par manque de pluie, le niveau est descendu au niveau du repère D (échelle [CD]). Cette échelle est située à 2m du mur parapet.

La droite (OM) passe par les points D, B, et F.



Question a) (1,5 point)

Calculez la distance OA.
Le point O est le milieu de la rivière. Quelle est la largeur de la rivière ?

Comme les droites (EA) et (FB) sont sécantes au point O
et comme les droites (BA) et (FE) sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires au lit de la rivière)
on peut appliquer le théorème de Thalès et on obtient :

$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}$, soit $\frac{OA}{9} = \frac{OB}{OF} = \frac{2}{3,5}$

Comme $\frac{OA}{9} = \frac{2}{3{,}5}$, on a $OA = \frac{2 \times 9}{3{,}5} = \frac{18}{3{,}5} \approx 5{,}14$

O est le milieu de la rivière de "bord A", la largeur de la rivière est donc de 2 × OA.
Or 2 × OA = 2 × 5,14 = 10,28
Donc, la largeur de la rivière est de **<u>10,28 m</u>**.

Question b) (1,5 point)

Calculez la hauteur CD correspondant aux basses eaux du mois d'août.

Comme les droites (BD) et (AC) sont sécantes au point O
et comme les droites (BA) et (DC) sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires au lit de la rivière)

on peut appliquer le théorème de Thalès et on obtient :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{BA}{DC'} \quad \text{soit} \quad \frac{5{,}14}{5{,}14 - 2} = \frac{OB}{OF} = \frac{2}{DC}$$

Comme $\frac{5{,}14}{5{,}14 - 2} = \frac{2}{DC'}$, on a $DC = \frac{2 \times (5{,}14 - 2)}{5{,}14} = \frac{6{,}28}{5{,}14} \approx 1{,}22$

La hauteur CD est environ de **<u>1,22 m</u>**.

Exercice 5 (1,5 point)

Résolvez les équations :

Question a) (0,5 points)

$$\frac{3x}{2} = \frac{1}{5}$$

En appliquant le produit en croix, on obtient l'équation : $3x \times 5 = 2 \times 1$

Soit $15x = 2$

Ainsi $x = \frac{2}{15}$

Question b) (0,5 points)

$0 = -3 - 2x$

Soit $2x = -3$

Ainsi $x = -\frac{3}{2}$

Question c) (0,5 points)

Simplifiez : $B = 2 \times \sqrt{\frac{2}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{8}}$

Soit : $B = \frac{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{27} \times \sqrt{8}}$

$B = \frac{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4}}$

$B = \frac{2}{\sqrt{9} \times \sqrt{4}}$

$B = \frac{2}{3 \times 2}$

$B = \frac{1}{3}$